

非线性电容 RLC 串联电路的 2 次超谐共振分析

李高峰

(唐山学院 基础部, 河北 唐山 063000)

摘要:以非线性电容 RLC 串联电路为研究对象,应用多尺度法求得 2 次超谐共振的幅频响应方程,并且通过数值计算可知,电子元器件的参数变化对振幅值具有影响,幅频响应曲线具有跳跃和滞后现象,即电阻可以抑制振幅值,电源、电容、电感可以增大振幅值。

关键词:RLC 串联电路;非线性电容;多尺度法;2 次超谐共振

中图分类号:O321 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-349X(2018)06-0001-04

DOI:10.16160/j.cnki.tsxyxb.2018.06.001

Analysis for Quadratic Superharmonic Resonance of RLC Series Circuit with Nonlinear Capacitance

LI Gao-feng

(Department of Basic Courses, Tangshan University, Tangshan 063000, China)

Abstract: With the RLC series circuit with nonlinear capacitance as the research object, the amplitude frequency response function of quadratic superharmonic resonance is established by means of multiple scales for nonlinear oscillations. The calculation shows that the parameters of electronic components have an influence on the amplitude value, and the amplitude frequency response curve has jump and hysteresis phenomenon, i. e. the resistance could lower the amplitude value, while the power, capacitance and inductance could raise it.

Key Words: RLC series circuit; nonlinear capacitance; multiple scales; quadratic superharmonic resonance

0 引言

以变容二极管、参数放大器、混音器、传感器等装置设计电路时,电子元器件通常用非线性电容。詹士昌等研究了非线性 RLC 串联谐振电路^[1]。黄偲等给出了一类非线性 RLC 电路的新解法及数值仿真,从而算出电路的相轨线、时程曲线、相程曲线、时幅曲线、相幅曲线、幅频曲线、相频曲线和响应周期,数值仿真显

示,结果与数值积分法吻合良好^[2]。丁光涛利用 Lagrange 力学逆问题理论和方法,构造了电感、电容和电阻三种耦合 RLC 电路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数^[3]。郭晓莹等在电容耦合 RLC 电路中,通过改变外部信号源的频率,测量了传输到第一个 RLC 回路的功率随信号频率的变化关系^[4]。杨志安等研究了非线性 RLC 电路与板和微梁耦合系统的非线性动

基金项目:河北省自然科学基金项目(A2009000997);河北省教育厅重点项目(ZD2017307);唐山市科技计划项目(15130262a)

作者简介:李高峰(1977—),女,河北蔚县人,副教授,硕士,主要从事非线性机电耦联动力学研究。

力学问题^[5-7]。潘杰等对 RLC 并联谐振电路进行了理论研究^[8]。B. Nana 等研究了铁磁磁芯电感器件的非线性,分析了在由交流电源强迫的 RLC 串联电路中电流的解析表达式^[9]。国外学者还对非线性 RLC 电路动力学问题和系统产生混沌现象的条件等进行了研究^[10-12]。

笔者曾对非线性电容 RLC 串联电路进行过主共振和亚谐共振的研究^[13-15]。现本文从超谐视角,以 RLC 串联电路的振动微分方程为研究对象,研究非线性电容 RLC 串联电路系统的 2 次超谐共振问题。

1 RLC 串联电路的振动方程

RLC 串联电路由电阻 R , 电感 L , 非线性电容和电源 E_m 串接而成, 非线性电容的库伏特性为: $u = \frac{1}{C_0} q + k_2 q^2 + k_3 q^3 + k_4 q^4 + \cdots + k_n q^n$, 其中 q 为电荷, C_0 为线性电容, $k_2, k_3, \dots, k_n$ 为非线性电容电荷系数。

拉格朗日方法是用广义坐标, 电路取电荷 q 为广义坐标, 电流为 $i = \dot{q}$, 磁能为 $W_m = \frac{1}{2} L \dot{q}^2$, 电容器的电能 $W_e = \frac{1}{2} C_0 u^2$, 耗散函数为 $F_e = \frac{1}{2} R \dot{q}^2$, 非保守的广义力为 $E = E_m \cos \omega t$, 系统的拉格朗日函数 $La = W_m - W_e$ 。

根据拉格朗日—麦克斯韦方程, 可得到该系统的运动微分方程为

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC_0} q + \frac{k_2}{L} q^2 + \frac{k_3}{L} q^3 = \frac{E_m}{L} \cos \omega t. \quad (1)$$

对式(1)进行处理, 可得著名的 Duffing 方程为

$$\ddot{q} + 2\mu\dot{q} + \omega_0^2 q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 = f \cos \omega t, \quad (2)$$

式中, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}$, $\alpha_2 = \frac{k_2}{L}$, $\alpha_3 = \frac{k_3}{L}$, $\mu = \frac{R}{2L}$, $f = \frac{E_m}{L}$ 。

2 2 次超谐共振理论分析

弱非线性振动在非线性和阻尼项前面冠以小参数 ϵ , 可得

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \epsilon(-2\mu\dot{q} - \alpha_2 q^2 - \alpha_3 q^3 + f \cos \omega t). \quad (3)$$

应用多尺度法求 2 次超谐共振微分方

程, 设

$$q(T) = q_0(T_0, T_1) + \epsilon q_1(T_0, T_1). \quad (4)$$

将式(4)代入式(3)得到一组线性偏微分方程

$$D_0^2 q_0 + \omega_0^2 q_0 = f \cos \omega t, \quad (5)$$

$$D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - 2\mu D_0 q_0 - \alpha_2 q_0^2 - \alpha_3 q_0^3. \quad (6)$$

方程(5)的解为

$$\phi_{n0}(T_0, T_1) = A(T_1) e^{j\omega_0 T_0} + B e^{j\omega T_0} + cc, \quad (7)$$

这里 $cc = \overline{A}(T_1) e^{-j\omega_0 T_0} + B e^{-j\omega T_0}$ 为共轭项, 且

$$\begin{cases} A(T_1) = \frac{a(T_1)}{2} e^{j\beta} \\ B = \frac{f}{2(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{cases}. \quad (8)$$

将式(8)代入式(6)得

$$D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = -[2j\omega_0(D_1 A + \mu A) + 6\alpha_3 A B^2 + 3\alpha_3 A^2 \overline{A} + \alpha_2 B e^{j\sigma T_1}] e^{j\omega_0 T_0} + cc. \quad (9)$$

研究系统的 2 次超谐共振, 引入调谐参数 σ , 由下式确定为

$$2\omega = \omega_0 + \epsilon\sigma, \sigma = o(1).$$

由式(9)得消除永年项的条件为

$$-[2j\omega_0(D_1 A + \mu A) + 6\alpha_3 A B^2 + 3\alpha_3 A^2 \overline{A} + \alpha_2 B e^{j\sigma T_1}] = 0. \quad (10)$$

将式 $A(T_1) = \frac{a(T_1)}{2} e^{j\beta}$, $\overline{A}(T_1) =$

$\frac{a(T_1)}{2} e^{-j\beta}$ 代入式(10), 分离实虚部, 令 $(\sigma T_1 - \beta) = \varphi$ 可得

$$\begin{cases} D_1 a = -\mu a - \frac{\alpha_2 B^2}{\omega_0} \sin \varphi \\ a D_1 \varphi = a(\sigma - \frac{3\alpha_3 B^2}{\omega_0}) - \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} a^3 - \frac{\alpha_2 B^2}{\omega_0} \cos \varphi \end{cases}. \quad (11)$$

相应的一次近似解为

$$a(t) = a(\epsilon t) \cos(2\omega t - \phi(\epsilon t)) + \frac{f \cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (12)$$

令式(11)中 $D_1 a = 0$, $D_1 \varphi = 0$, 消去 φ , 得到 2 次超谐共振的幅频响应方程

$$\left[\mu^2 + \left(\sigma - \frac{3\alpha_3 B^2}{\omega_0} - \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} a^2 \right)^2 \right] a^2 = \left(\frac{\alpha_2 B^2}{\omega_0} \right)^2, \quad (13)$$

$$\varphi = \arctan \frac{\mu}{-\sigma + \frac{3\alpha_3 B^2}{\omega_0} + \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} a^2}. \quad (14)$$

从方程(13)中解出 σ 为 a 的函数,得

$$\sigma = \frac{3\alpha_3 B^2}{\omega_0} + \frac{3\alpha_3}{8\omega_0} a^2 \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha_2 B^2}{\omega_0 a} \right)^2 - \mu^2}. \quad (15)$$

由于 $B \neq 0$, 方程(13)的解必满足 $a \neq 0$ 。2

次超谐共振峰为 $a_{\max} = \frac{\alpha_2 B^2}{\omega_0 \mu} = \frac{\alpha_2 f^2}{4\omega_0 \mu (\omega_0^2 - \omega^2)^2}$ 。

它与系统的非线性程度有关,显著有别于主共振。由于共振峰与 ε 量级相同,弱非线性系统的 2 次超谐共振的危险性比较小。

3 数值实例分析

应用 Matlab 软件对式(13)进行计算,可以得到 RLC 串联电路 2 次超谐共振的响应曲线(见图 1),数值计算中,电子元器件的基本参数为:电阻 $R=15 \Omega$,电动势 $E_m=25 \text{ V}$,电感 $L=15 \text{ H}$,线性电容 $C_0=0.001 \text{ F}$ 。

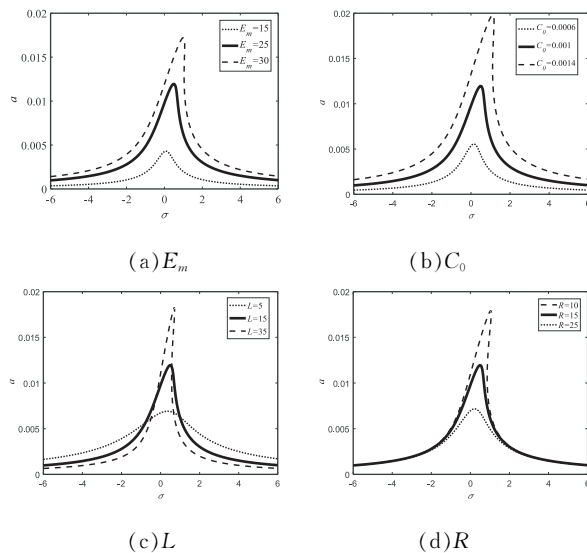


图 1 系统的超谐共振响应曲线

图 1 中系统的超谐共振响应曲线具有跳跃现象和滞后现象。电动势作为系统的供能元件,电容、电阻和电感作为耗能元件,其数值变化时对系统振幅以及共振区域均有影响。由图 1(a)到图 1(c)可知,电动势、线性电容和电感

增大时,系统的共振幅值均增大,且图 1(a)和图 1(b)的共振区域依次增大,而图 1(c)共振区域随振幅的增大而变窄。图 1(d)中随着电阻值的增大系统的共振幅值和区域都减小,这是因为电阻抑制系统的非线性,电阻增大时电流减弱,电路中的电荷也相应减少。

图 2 为调谐值变化时电动势—振幅响应曲线,电动势增大时振动幅值增大,整个电路中电流增大,电荷增多。图 3 为振幅随电容变化的响应曲线,随着电容的增大,振幅也增大。图 4 为振幅随非线性电荷系数 k_2 变化的响应曲线,随着 k_2 的增大,振动幅值也增大。图 5 为振幅随非线性电荷系数 k_3 变化的响应曲线,随着 k_3 的增大,振动幅值减小,但应注意的是, $\sigma > 0$ 时曲线振幅随非线性电荷系数增大先增大再减小。综合图 2—5 可知,当 $\sigma > 0$ 时,随着电动势、电容、非线性电荷系数等参数的增大,RLC 串联电路的响应曲线具有跳跃现象和滞后现象;在 $\sigma < 0$ 时,参数增大时系统振动幅值逐渐增加,不出现跳跃现象和滞后现象。

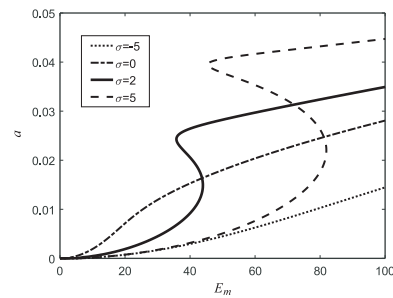


图 2 电动势—振幅响应曲线

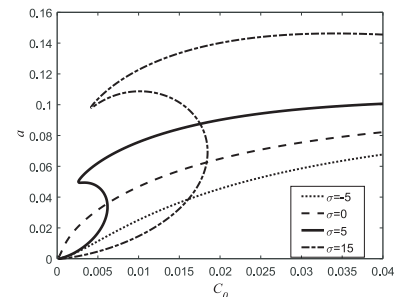
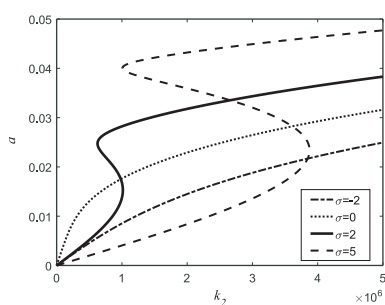
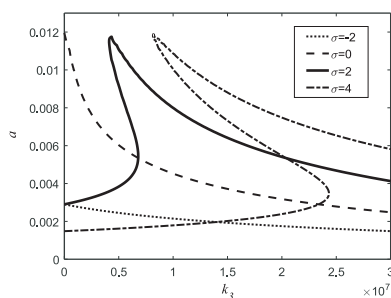


图 3 电容—振幅响应曲线

图 6 为电阻—振幅响应曲线,调谐值越大系统的振动幅值滞后性越强,逐渐出现了跳跃现象,与图 1(b)比较可知,在 $\sigma=0$ 且电阻增大

图 4 非线性电荷系数 k_2 —振幅响应曲线图 5 非线性电荷系数 k_3 —振幅响应曲线

时,振动幅值缓慢减弱,最终趋于稳定。图 7 为振幅随电感变化的响应曲线,当调谐值增大,系统的振动幅值减小;当 $\sigma > 0$ 时,随着电感的增大系统的振动幅值减小,并趋于稳定;当 $\sigma = 0$ 时,随着电感的增大系统的振动幅值增大。

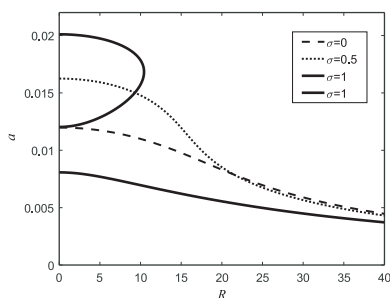


图 6 电阻—振幅响应曲线

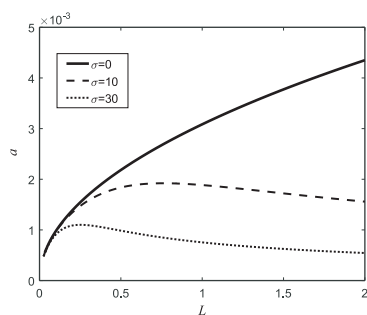


图 7 电感—振幅响应曲线

4 结论

应用多尺度法得到非线性电容 RLC 串联电路系统 2 次超谐的幅频响应方程。电路中的非线性振动是由电路中的移动电荷造成的,电阻增大电路中的电流减小,同时电荷数减少,振动的振幅相应减小,此时电阻对振幅有抑制作用。当 $\sigma > 0$ 时,随着电动势、电容、非线性电荷系数 k_2 与 k_3 等参数的增大,RLC 串联电路的响应曲线具有跳跃现象和滞后现象。

参考文献:

- [1] 詹士昌,梁方东. RLC 电路非线性现象产生机制的研究[J]. 杭州师范学院学报(自然科学版),2002(4):31-33.
- [2] 黄偲,余顺争. 非线性 RLC 电路的新解法及数值仿真[J]. 中山大学学报(自然科学版),2016,55(3):83-88.
- [3] 丁光涛. 三种耦合 RLC 电路的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数[J]. 动力学与控制学报,2014,12(4):304-308.
- [4] 郭晓莹,杨靖,李建,等. RLC 电路中类电磁感应透明现象的实验研究[J]. 山西大学学报(自然科学版),2012,35(1):68-74.
- [5] 杨志安,崔一辉. 电感非线性 RLC 电路弹簧耦合系统 3 次超谐共振研究[J]. 电子器件,2008(3):988-991.
- [6] 杨志安,贾尚帅. RLC 串联电路与微梁耦合系统的吸合电压与电振荡[J]. 应用力学学报,2010,27(4):721-726.
- [7] 崔一辉,杨志安. RLC 电路弹簧耦合系统的级数解[J]. 振动与冲击,2006,25(4):76-77.
- [8] 潘杰,刘晓文,陈桂真. RLC 电路并联谐振理论与仿真分析[J]. 实验科学与技术,2016,14(5):21-25.
- [9] NANA B, YAMGOUE S B, KEMAJOU I, et al. Dynamics of a RLC series circuit with hysteretic iron-core inductor [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2018, 106: 184-192.

(下转第 32 页)

由表 1 可以看出,该系统对声音强度在 40 dB 以上、距离小于 3.5 m 的报警准确率是百分之百,未出现漏报和误报的情况;而且在有效范围内测试距离越近、音量越高,系统响应时间越短、准确率越高。

5 结论

针对当前校车安全隐患问题进行研究,设计开发出儿童滞留校车报警系统。该系统以单片机作为控制核心,根据传感器检测的信号,对报警模块做出控制。通过多次测试,发现该系统具有准确度高、安装维护简单、成本低、扩展性强等优点。

参考文献:

- [1] 姜志海,刘连鑫,赵艳雷. 单片微型计算机原理与应用[M]. 北京:电子工业出版社, 2015:23-29.
- [2] 汤中波. 校车乘员乘用安全监控系统的研究与开发[D]. 厦门:厦门理工学院,2016.

- [3] 吴飞龙. 基于机器视觉的校车安全监测系统[D]. 杭州:浙江大学,2016.
- [4] 胡健. 单片机原理与接口技术[M]. 北京:机械工业出版社,2016:193-202.
- [5] 张玉林. 单片机在 GSM 移动通信中的应用[J]. 山东工业技术,2018(7):153.
- [6] ATA O W. An extended-AMATA indoor propagation model for GSM 900/1800 MHz and Wi-Fi 2.4 GHz frequencies[J]. Kluwer Academic Publishers,2017,92(3): 1-17.
- [7] ZHANG Y N, PENG X H, HOU L G, et al. A design of hand-held remote controller for an implantable stimulator based on 51 MCU and WiFi[C]. IEEE International Conference on Solid-State and Integrated Circuit Technology,2017:376-378.

(责任编辑:李秀荣)

(上接第 4 页)

- [10] BLANKENSTEIN G. Geometric modeling of nonlinear RLC circuits[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems. I, Regular Papers,2005,52(2):396-404.
- [11] CHAKRAVARTHY S K. Nonlinear oscillations due to spurious energisation of transformers [J]. EE Proc.-Elect r. Power Appl.,1998,145(6):585-592.
- [12] OKSASOGLU A, VAVRIV D. Interaction of low and high frequency oscillation in a nonlinear RLC circuit [J]. IEEE Transaction on Circuit and Systems-I:

Fundamental Theory and Application, 1994,41(10):669-672.

- [13] 李高峰. 非线性电容 RLC 串联电路的主共振研究[J]. 计算物理,2014,31(3):351-356.
- [14] 李高峰. 非线性电容 RLC 串联电路的 1/3 亚谐共振[J]. 河北大学学报(自然科学版),2015,35(1):107-112.
- [15] 李高峰. 非线性电容 RLC 串联电路的 1/2 次亚谐共振分析[J]. 电子器件,2014,37(2):249-253.

(责任编辑:李秀荣)